28-6 Inductancia

El flujo que atraviesa un circuito puede relacionarse con la corriente en el mismo y con las corrientes que circulan por circuitos próximos. (Admitimos que no existe en las cercanías ningún imán permanente.) Consideremos los dos circuitos de la Figura 28-19. El campo magnético en un punto determinado P se compone de una parte debida a I_1 y otra parte debida a I_2. Estos campos son proporcionales a las corrientes que los producen y podrían en principio ser calculados a partir de la ley de Biot-Savart. Por consiguiente podemos escribir el flujo que atraviesa el circuito 2 como la suma de dos partes; una parte es proporcional a la corriente I_1 y la otra lo es a la corriente I_2:

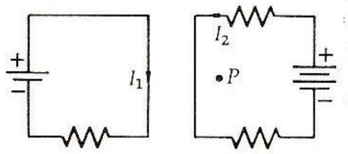

Figura 28-19
Dos circuitos adyacentes. El campo magnético en el punto P se debe parcialmente a la corriente I_1 y parcialmente a I_2. El flujo a través de cualquiera de los circuitos es la suma de dos términos, uno proporcional a I_1 y el otro a I_2.

Autoinducción e inductancia mutua

$$\phi_{m2} = L_2 I_2 + M_{12} I_1 \qquad \text{28-18}$$

en donde L_2 y M_{12} son constantes. La constante L_2 se denomina ***autoinducción*** del circuito 2 y depende de la disposición geométrica del mismo circuito. La constante M_{12} denominada *inductancia mutua* de los dos circuitos depende de la disposición geométrica entre ambos. En particular, podemos ver que si los circuitos están bastante separados, el flujo a través del circuito 2 debido a la corriente I_1 será pequeño y la inductancia mutua también lo será. Puede escribirse una ecuación semejante a la 28-18 para el flujo que atraviesa el circuito 1:

$$\phi_{m1} = L_1 I_1 + M_{21} I_2 \qquad \text{28-19}$$

La autoinducción L_1 depende sólo de la geometría del circuito 1, mientras que la inductancia mutua M_{21} depende de la disposición de ambos circuitos. Aunque no resulta evidente, puede demostrarse en general que estas dos inductancias mutuas son iguales:

$$M_{12} = M_{21} \qquad \text{28-20}$$

Cuando los circuitos están fijos y sólo varían las corrientes, sus fuerzas electromotrices son, según la ley de Faraday,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= -\frac{d\phi_{m1}}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \\ \mathcal{E}_2 &= -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} \end{aligned} \qquad \text{28-21}$$

en donde hemos prescindido de los subíndices de la inductancia mutua.

La unidad SI de inductancia es el henry (H). A partir de las Ecuaciones 28-19 y 28-21 vemos que el henry está relacionado con otras unidades SI por

$$1\ \text{H} = 1\ \text{T·m}^2/\text{A} = 1\ \text{V·s/A}$$

Ley de Faraday

Veremos que la inductancia puede escribirse siempre como el producto de μ_0 por una longitud característica. La unidad SI de la constante μ_0 puede por consiguiente expresarse de modo conveniente en henrys por metro:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

En principio, el cálculo de la autoinducción y de la inductancia mutua es bastante sencillo para circuitos y disposiciones determinadas. Por ejemplo, para calcular L_1 necesitamos sólo admitir que pasa cierta corriente I_2 y calcular el campo magnético a partir de la ley de Biot-Savart en todos los puntos de ciertas superficies limitadas por el circuito. Este campo magnético será como es natural, proporcional a la corriente I_1. Entonces calcularemos el flujo de este campo integrando en todo el área. Puesto que B es proporcional a I_1, el flujo también será proporcional a I_1. La constante de proporcionalidad es la autoinducción L_1. Análogamente, calcularemos la inductancia mutua admitiendo que pasa cierta cantidad de corriente I_1 en el circuito 1 y calculando el campo magnético en todos los puntos de la superficie limitada por el circuito 2 y a partir de él el flujo que atraviesa el mismo. Debido a la dificultad para calcular el campo magnético en general a partir de la ley de Biot-Savart y la dificultad también de integrar este campo en una superficie cualquiera, no es sorprendente que los cálculos de la autoinducción e inductancia mutua sean extremadamente difíciles excepto en algunas formas geométricas muy sencillas. Consideremos, por ejemplo, el cálculo de la autoinducción en el caso de una sola espira circular de radio R. El campo magnético en el centro de la espira es $B = {}^1\!/_2\mu_0 I/R$. Pero con objeto de hallar el flujo en toda la espira necesitamos conocer el valor de B en todos los puntos del círculo limitado por dicha espira y no sólo en el centro. Este cálculo es demasiado difícil para hacerlo aquí. La autoinducción de una sola espira depende no sólo de su radio sino también del radio del hilo conductor.

A continuación presentamos algunos casos en los cuales puede calcularse la inductancia al menos aproximadamente.

Autoinducción de un solenoide

Este cálculo no es difícil pues con buena aproximación, el campo magnético en el interior del solenoide es uniforme y viene dado por

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I = \mu_0 n I$$

en donde $n = N/\ell$ es el número de vueltas por unidad de longitud, N el número total de vueltas, ℓ la longitud total e I la corriente del solenoide. El área cerrada por este circuito es el área de una vuelta multiplicada por el número de ellas y por tanto el flujo es

$$\phi_m = BNA = \mu_0 nINA = \mu_0 n \frac{N}{\ell} \ell A I = \mu_0 n^2 (\ell A) I \qquad 28\text{-}22$$

siendo A el área de una sola espira. Como era de esperar, el flujo es proporcional a la corriente I. La constante de proporcionalidad es la autoinducción:

$$L = \frac{\phi_m}{I} = \mu_0 n^2 A \ell = \mu_0 N^2 \frac{A}{\ell} \qquad 28\text{-}23$$

Autoinducción de un solenoide

La autoinducción es proporcional al cuadrado del número de vueltas por unidad de longitud y al volumen $A\ell$. Puede también considerarse como el producto de μ_0 por N^2 y por la longitud características A/ℓ.

Ejemplo 28-1. Hallar la autoinducción de un solenoide de 10 cm, área 5 cm^2 y 100 vueltas.

Podemos calcular la autoinducción a partir de la Ecuación 28-23 en henrys si ponemos todas las magnitudes en unidades SI:

$$n = \frac{N}{\ell} = \frac{100 \text{ vueltas}}{0.1 \text{ m}} = 10^3 \text{ vueltas/m}$$

$$A\ell = (5 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(0.1 \text{ m}) = 5 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

$$L = (4\pi \times 10^{-7})(10^3)^2(5 \times 10^{-5}) = 2\pi \times 10^{-5} \text{ H}$$

Ejemplo 28-2. ¿A qué ritmo debe variar la corriente en el solenoide del Ejemplo 28-1 para inducir una fem de 20 V?

A partir de la Ecuación 28-21 con $M = 0$ tenemos

$$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt} = 20 \text{ V}$$

Entonces

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\mathcal{E}}{L} = \frac{20 \text{ V}}{2\pi \times 10^{-5} \text{ H}} = -3.18 \times 10^5 \text{ A/s}$$

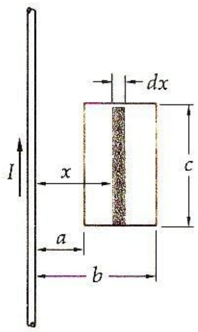

Figura 28-20
Conductor rectilíneo largo y un circuito para el cálculo de la inductancia mutua.

Inducción mutua entre un conductor largo y una espira rectangular

En la Figura 28-20 se muestran dos circuitos para los cuales puede calcularse la inductancia mutua. En ella se ve un conductor a la izquierda que se supone suficientemente largo para que la parte restante de su circuito esté suficientemente alejada de la espira rectangular de modo que contribuya con un flujo despreciable. Para hallar el flujo que atraviesa la espira rectangular debemos realizar una integración. Puesto que el campo magnético debido a un conductor largo disminuye proporcionalmente a $1/r$ siendo r la distancia al conductor, escogeremos el elemento de área en forma de tira indicado en la figura. El área de esta tira es $c\,dx$ y el flujo que atraviesa la misma es

$$d\phi_m = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} c\,dx \qquad 28\text{-}24$$

en donde I es la corriente que circula por el conductor largo. El flujo total se halla integrando desde $x = a$ hasta $x = b$:

$$\phi_m = \frac{\mu_0}{2\pi} cI \int_a^b \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 Ic}{2\pi} \ln\frac{b}{a} \qquad 28\text{-}25$$

El flujo que atraviesa la espira rectangular debido a la corriente I que circula por el conductor largo es proporcional a I como era de esperar. La constante de proporcionalidad es la inductancia mutua:

$$M = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln\frac{b}{a}$$

Ley de Faraday

Cuestiones

6. ¿En cuánto variará la autoinducción de un solenoide si se enrolla la misma longitud de conductor en un cilindro del mismo diámetro pero de longitud doble? ¿Si se enrolla una cantidad de alambre doble sobre el mismo cilindro?

7. Dos bobinas solenoidales se enrollan en cilindros del mismo diámetro. ¿Es posible que tengan la misma autoinducción aunque uno tenga una longitud total de conductor doble que el otro?

28-7 Circuitos *LR*

Como hemos visto, la autoinducción de un circuito impide que la corriente aumente o disminuya de modo instantáneo. Los circuitos que contienen bobinas o solenoides de muchas vueltas tienen una gran autoinducción. El símbolo de una autoinducción o bobina es . Con frecuencia se puede despreciar la autoinducción del resto del circuito en comparación con la de una bobina de este tipo.

Un circuito que contiene baterías o pilas, resistencias y bobinas, se denomina un circuito LR. Puesto que todos los circuitos contienen resistencias y autoinducciones, el análisis puede aplicarse en cierta extensión a todos los circuitos. Además los circuitos tienen también capacidades entre partes del mismo a potenciales diferentes. Incluiremos los efectos de la capacidad en la Sección 28-9, cuando estudiemos circuitos LC y LCR. Ahora se desprecia la capacidad con objeto de simplificar el análisis y resaltar las características especiales de las bobinas en un ejemplo sencillo.

La Figura 28-21 muestra un circuito típico. Se desprecia la resistencia interna de la batería y se considera que es una fem ideal. La corriente en el circuito es inicialmente cero. En el momento $t = 0$ se cierra el interruptor. Como ya hemos visto previamente, al ir aumentando la corriente existe una fem inducida en la bobina de modo que su sentido se opone al aumento de corriente. Como puede verse en la figura, el sentido de la corriente coincide con el de las agujas del reloj. Podemos relacionar la corriente, su variación frente al tiempo dI/dt, y la fem de la batería aplicando la primera regla de Kirchhoff al circuito. Debido al signo negativo de la Ecuación 28-21, que se reduce para este círculo a $\varepsilon = -L dI/dt$, y a la posibilidad de que dI/dt sea positivo o negativo, puede existir cierta confusión al aplicar la regla de Kirchhoff y obtener el signo correcto para la diferencia de potencial a través de la bobina. La mejor aproximación resulta de suponer una dirección para I, suponer dI/dt como positivo, y luego escribir $L\, dI/dt$ para la diferencia de potencial a través de la bobina, deduciendo el signo adecuado de la ley de Lenz. En la Figura 28-21 la caída de potencial en la resistencia desde el punto a al b posee un valor igual a IR. Si dI/dt es positivo, la fem inducida en la bobina está dirigida en el sentido de c a b según disminuye la corriente. Por tanto, el punto b se comporta como el borne positivo de una batería. Desde el punto b al c el potencial disminuye en una cantidad $L\, dI/dt$. Según nos movemos desde el punto c al punto a, el potencial aumenta en una cantidad igual a la fem de la batería, a la que hemos llamado ε_0. Por tanto, la aplicación de la primera regla de Kirchhoff al circuito nos da

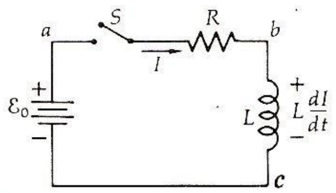

Figura 28-21
Circuito LR típico.

$$\varepsilon_0 = IR + L\frac{dI}{dt} \qquad 28\text{-}26$$

Esta ecuación es semejante a la que obtuvimos en el caso de un circuito RC. De nuevo, podemos comprender el comportamiento general de la corriente I en función del tiempo sin necesidad de acudir a los detalles matemáticos de la solución de esta ecuación.

En el instante de cerrar el interruptor, cuando $t = 0$, la corriente es nula y la variación de la corriente por unidad de tiempo según la Ecuación 28-26 es

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \qquad 28\text{-}27$$

La corriente aumenta así como era de esperar. Después de un tiempo breve, la corriente ha alcanzado un determinado valor positivo y la variación por unidad de tiempo viene dada por

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0}{L} - \frac{IR}{L}$$

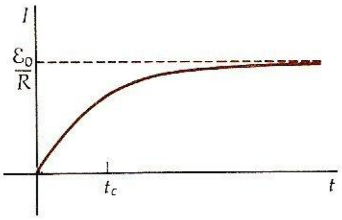

Figura 28-22
Gráfico de la corriente I en función del tiempo t en el caso del circuito de la Figura 28-21 en el que se cierra el interruptor en el instante $t = 0$. La corriente crece hasta su valor máximo $\mathcal{E}_0/R$, alcanzando el 63 por ciento de su valor después de un tiempo $t_c = L/R$.

En este instante la corriente sigue creciendo pero su velocidad de aumento es menor que en el momento $t = 0$. El valor final de la corriente puede obtenerse haciendo dI/dt igual a cero. A partir de la Ecuación 28-26 vemos que el valor final de la corriente es

$$I_f = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \quad \text{cuando} \quad \frac{dI}{dt} = 0 \qquad 28\text{-}28$$

La Figura 28-22 muestra I en función de t. El tiempo necesario para que la corriente alcance un valor que sea un porcentaje apreciable de su valor final depende de la resistencia y de la bobina. La expresión matemática que nos da la corriente en función del tiempo se obtiene resolviendo la Ecuación 28-26 y es

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R}(1 - e^{-RT/L}) = I_f(1 - e^{-t/t_c}) \qquad 28\text{-}29$$

Constante de tiempo

en donde

$$t_c = \frac{L}{R} \qquad 28\text{-}30$$

es la *constante de tiempo* del circuito. Cuanto mayor es la autoinducción L o menor la resistencia R, más tiempo se tardará en que la corriente aumente hasta su valor límite.

Obsérvese que el producto de la pendiente inicial ε_0/L por la constante de tiempo $t_c = L/R$ es igual a la corriente final ε_0/R:

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_0 t_c = \frac{\mathcal{E}_0}{L}\frac{L}{R} = \frac{\mathcal{E}_0}{R} = I_f$$

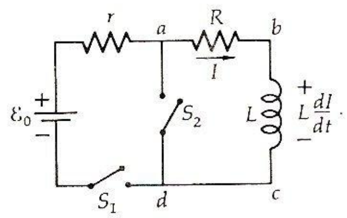

Figura 28-23
Un circuito LR con dos interruptores para que la batería pueda eliminarse del circuito. Después de que la corriente de la bobina alcanza su valor máximo con S_1 cerrado, se cierra S_2 y se abre S_1. La corriente entonces disminuye con el tiempo según se indica en la Figura 28-24.

Si la corriente continuase aumentando con su velocidad inicial, alcanzaría su valor final después de una constante de tiempo.

La Figura 28-23 muestra un dispositivo ligeramente diferente con un interruptor adicional, que nos permite eliminar la batería, y una resistencia adicional r para proteger a esta última de modo que no resulte cortocircuitada cuando ambos interruptores estén momentáneamente cerrados. Si se abren los dos interruptores y cerramos el interruptor S_1 en un determinado instante, la corriente aumenta en el circuito de modo semejante al que hemos acabado de analizar excepto en que ahora la resistencia total es $r + R$ y la corriente final es $\mathcal{E}/(r + R)$. Supongamos que este interruptor ha estado cerrado durante un tiempo suficientemente largo en comparación con la constante de tiempo que vale ahora $L/(R + r)$, de modo que la corriente es aproximadamente estacionaria en su valor final, que denominaremos I_0. Entonces se cierra el interruptor S_2 y se abre el S_1 para eliminar la batería por completo de nuestra consideración. Escojamos el instante $t = 0$ cuando se cierra el interruptor S_2. Ahora tenemos un circuito con una resistencia y una bobina solamente (malla *abcd*) y con una corriente inicial I_0. De nuevo, para analizar este circuito hemos de aplicar la ley de Kirchhoff. La caída de potencial desde el punto *a* hasta el *b* a través de la resistencia es IR. A través de la bobina la caída de potencial desde *b* hasta *c* es $L\, dI/dt$. (Puesto que dI/dt resultará ser negativa, este valor es realmente un aumento de potencial. Se produce menos confusión con los signos si siempre admitimos que las cantidades I y dI/dt son positivas cuando estudiemos las ecuaciones. Las soluciones de éstas nos dirán entonces el signo correcto de las magnitudes.) Volvamos ahora a nuestro punto original. La suma de las caídas de potencial debe ser cero. Así pues

$$IR + L\frac{dI}{dt} = 0 \qquad \text{28-31}$$

Puesto que la corriente I es positiva, la variación dI/dt por unidad de tiempo es negativa:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} I \qquad \text{28-32}$$

La fem inducida tiene el sentido de la corriente y sentido opuesto al indicado en la Figura 28-23. De acuerdo con la ley de Lenz, la fem inducida tiene un sentido tendente a mantener la corriente y evitar su disminución. La Ecuación 28-23 es semejante a la Ecuación 25-21 obtenida por la descarga de un condensador en donde I ha sido sustituido por Q y L/R por la constante de tiempo RC.

La Figura 28-24 muestra un gráfico esquemático de la corriente I en función del tiempo t. El valor original de la corriente es I_0 y el valor original de la pendiente es $dI/dt = -RI_0/L$. Al disminuir la corriente, la pendiente disminuye de valor hasta que tanto la corriente como su pendiente sean nulas. La expresión matemática de la corriente es

$$I = I_0 e^{-Rt/L} = I_0 e^{-t/t_c} \qquad \text{28-33}$$

en donde de nuevo $t_c = L/R$ es la constante de tiempo.

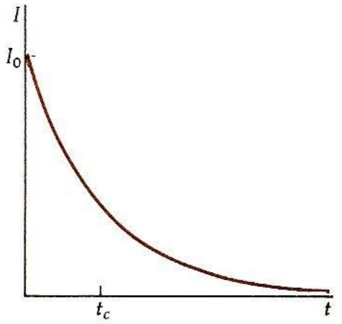

Figura 28-24
Corriente en función del tiempo después de que se ha cerrado el interruptor S_2 de la Figura 28-23. La corriente disminuye proporcionalmente a e^{-t/t_c}, en donde $t_c = L/R$ es la contante de tiempo.

28-8 Energía magnética

Cuando se establece una corriente en un circuito semejante al indicado en la Figura 28-21, sólo parte de la energía suministrada por la batería se transforma en calor por efecto Joule en la resistencia; el resto de la energía se almacena en la bobina. Podemos ver esto multiplicando cada término de la Ecuación 28-26 por el valor de la corriente. Entonces

$$\mathcal{E}_0 I = I^2 R + LI\frac{dI}{dt} \qquad \text{28-34}$$

El primer miembro de esta ecuación representa la velocidad a la que la fem suministra energía. El primer sumando del segundo miembro, I^2R, es la velocidad a la que se transforma la energía en calor en la resistencia. El segundo sumando, $LI\,dI/dt$ es la velocidad a la que se almacena la energía en la bobina y es el término que deseamos estudiar. Sea U_m la energía almacenada en la bobina. De acuerdo con la Ecuación 28-34, el aumento por unidad de tiempo de esta energía es

$$\frac{dU_m}{dt} = LI\frac{dI}{dt} \qquad 28\text{-}35$$

Podemos hallar la energía total de la bobina integrando desde el tiempo $t = 0$ en el cual la corriente es cero hasta el tiempo $t = \infty$, cuando la corriente ha alcanzado su valor final I_f:

Energía en una bobina

$$U_m = \int dU_m = \int LI\,dI = \tfrac{1}{2}LI_f^2 \qquad 28\text{-}36$$

Esta energía se almacena en la autoinducción del circuito como podemos ver considerando lo que ocurre cuando se elimina la fem del circuito, como sucede en la Figura 28-23 al cerrar S_2 y abrir S_1. Aunque ahora no existe ninguna entrada de potencia en el circuito, ya que la fem está limitada, la corriente no se hace cero inmediatamente; de manera que debe existir todavía una energía que se cede a la resistencia. La velocidad a la cual la energía se cede a la resistencia es en este caso igual a la velocidad con que disminuye la energía que tiene la bobina. Podemos ver que esto es así multiplicando cada término de la Ecuación 28-31 por el valor de la corriente I. Entonces se tiene

$$I^2R = -LI\frac{dI}{dt} \qquad 28\text{-}37$$

Siempre que se establece una corriente en un circuito, se establece también un campo magnético. Podemos considerar la energía almacenada en un circuito en virtud de su autoinducción y de la corriente como una energía almacenada en el campo magnético. Cuando la corriente disminuye, disminuyendo la energía $^1/_2LI^2$ en la bobina, el campo magnético también disminuye. La idea de que la energía se almacena en un campo magnético es semejante a la ya indicada de que la energía se almacena en un campo eléctrico cuando se carga un condensador. En el Capítulo 23 veíamos que la energía electrostática almacenada en un condensador de láminas plano-paralelas puede escribirse como

$$U_e = \tfrac{1}{2}QV = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2 Ad$$

en donde el área de las placas A multiplicada por su separación d es igual al volumen en el que existe un campo electrostático E. Entonces razonábamos que esta relación es más general que la indicada en dicho ejemplo, a saber que siempre que se establece un campo electrostático en cualquier volumen, existe una energía almacenada $^1/_2\varepsilon_0E^2$ por unidad de volumen. Ahora daremos un razonamiento análogo en el caso de la energía magnética. De nuevo, por sencillez consideraremos un caso especial, el de un solenoide.

Sea n el número de vueltas por unidad de longitud de un solenoide y $A\ell$ su volumen, siendo A el área de la sección recta y ℓ la longitud. El campo magnético en el interior de un solenoide es

$$B = \mu_0 nI$$

ción del tiempo sin necesidad de acudir a los detalles matemáticos de la solución de esta ecuación.

En el instante de cerrar el interruptor, cuando $t = 0$, la corriente es nula y la variación de la corriente por unidad de tiempo según la Ecuación 28-26 es

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \qquad \text{28-27}$$

La corriente aumenta así como era de esperar. Después de un tiempo breve, la corriente ha alcanzado un determinado valor positivo y la variación por unidad de tiempo viene dada por

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0}{L} - \frac{IR}{L}$$

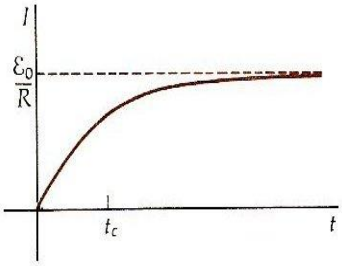

Figura 28-22
Gráfico de la corriente I en función del tiempo t en el caso del circuito de la Figura 28-21 en el que se cierra el interruptor en el instante $t = 0$. La corriente crece hasta su valor máximo $\mathcal{E}_0/R$, alcanzando el 63 por ciento de su valor después de un tiempo $t_c = L/R$.

En este instante la corriente sigue creciendo pero su velocidad de aumento es menor que en el momento $t = 0$. El valor final de la corriente puede obtenerse haciendo dI/dt igual a cero. A partir de la Ecuación 28-26 vemos que el valor final de la corriente es

$$I_f = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \quad \text{cuando } \frac{dI}{dt} = 0 \qquad \text{28-28}$$

La Figura 28-22 muestra I en función de t. El tiempo necesario para que la corriente alcance un valor que sea un porcentaje apreciable de su valor final depende de la resistencia y de la bobina. La expresión matemática que nos da la corriente en función del tiempo se obtiene resolviendo la Ecuación 28-26 y es

Ley de Faraday

y

$$I = -\omega Q_0 \text{ sen } \omega t \qquad 28\text{-}47$$

La Figura 28-26 muestra los gráficos de Q e I en función del tiempo. La carga oscila entre los valores $+Q_0$ y $-Q_0$ con una frecuencia angular $\omega = 1/\sqrt{LC}$. La corriente oscila también con esta frecuencia y está desfasada 90° con la carga. La corriente es máxima cuando la carga es cero y es nula cuando la carga es máxima.

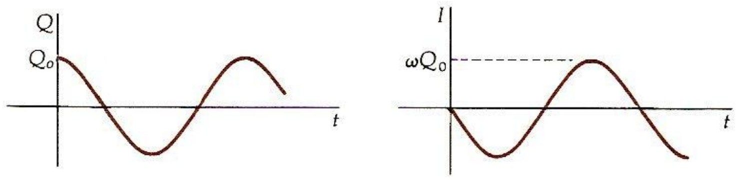

Figura 28-26
Gráfico de Q en función de t y de I en función de t para el circuito LC de la Figura 28-25.

En nuestro estudio de la oscilación de una masa situada sobre un muelle veíamos que la energía total es constante pero oscila entre las formas de energía potencial y cinética. En nuestro circuito LC también tenemos dos tipos de energía, energía electrostática y energía magnética. La energía electrostática del condensador es

$$U_e = \tfrac{1}{2}QV = \frac{Q^2}{2C}$$

siendo $V = Q/C$ la caída de tensión entre las armaduras del condensador. Sustituyendo Q en esta ecuación por $Q_0 \cos \omega t$ tenemos para la energía electrostática del condensador

$$U_e = \frac{Q_0^2}{2C}\cos^2 \omega t \qquad 28\text{-}48$$

La energía electrostática almacenada en el condensador oscila entre su valor máximo $Q_0^2/2C$ y cero. Cuando la corriente en el circuito es I, la energía magnética almacenada en la bobina es

$$U_m = \tfrac{1}{2}LI^2 \qquad 28\text{-}49$$

Sustituyendo en esta expresión por el valor que nos da la Ecuación 28-47 para la corriente, obtenemos

$$U_m = \tfrac{1}{2}L\omega^2 Q_0^2 \text{ sen}^2 \omega t = \frac{Q_0^2}{2C}\text{ sen}^2 \omega t \qquad 28\text{-}50$$

en donde hemos utilizado el hecho de que ω^2 es igual a $1/LC$. La energía magnética oscila también entre su valor máximo de $Q_0^2/2C$ y cero. La suma de las energías electrostática y magnética es la energía total, que es constante a lo largo del tiempo:

Energía de un circuito LC

$$U_{total} = U_e + U_m = \frac{Q_0^2}{2C}\cos^2 \omega t + \frac{Q_0^2}{2C}\text{ sen}^2 \omega t = \frac{Q_0^2}{2C}$$

Ejemplo 28-3. Un condensador de 2-μF está inicialmente cargado a 20 V y luego se cortocircuita con una bobina de 6-μH. ¿Cuáles son la frecuencia de oscilación y el valor máximo de la corriente?

La frecuencia de oscilación es independiente de la carga inicial y depende sólo de la capacidad y de la autoinducción. La frecuencia es

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$
$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{(6\times10^{-6})(2\times10^{-6})}} = 4.59 \times 10^4 \text{ Hz}$$

De acuerdo con la Ecuación 28-47 el valor máximo de la corriente está relacionado con el valor máximo de la carga por

$$I_m = \omega Q_0 = \frac{Q_0}{\sqrt{LC}}$$

La carga inicial en el condensador es

$$Q_0 = CV_0 = (2\ \mu\text{F})(20\ \text{V}) = 40\ \mu\text{C}$$

Así pues

$$I_m = \frac{40\ \mu\text{C}}{\sqrt{(6\ \mu\text{H})(2\ \mu\text{F})}} = 11.5\ \text{A}$$

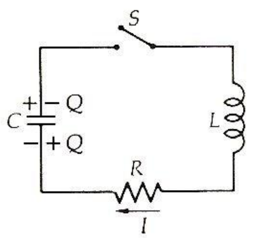

Figura 28-27
Circuito *LCR*.

En la Figura 28-27 incluimos una resistencia en serie con el condensador y la bobina. De nuevo admitiremos que el interruptor estaba inicialmente abierto, poseyendo el condensador una carga inicial Q_0 y que luego cerramos el interruptor en el instante $t = 0$. Sólo necesitamos modificar la Ecuación 28-40 incluyendo la caída de potencial IR a través de la resistencia. Entonces tenemos, según la regla de Kirchhoff,

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + IR = 0$$

o sea

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} + R\frac{dQ}{dt} = 0 \qquad \text{28-51}$$

utilizando $I = dQ/dt$ como antes. La Ecuación 28-51 es análoga a la Ecuación 11-39 correspondiente a un oscilador armónico amortiguado. Si la resistencia es pequeña, la carga y la corriente seguirán oscilando con casi la misma frecuencia $1/\sqrt{LC}$ pero las oscilaciones son amortiguadas; es decir, los valores máximos de la carga y la corriente disminuyen en cada oscilación. Podemos comprender esto cualitativamente a partir de consideraciones energéticas. Multipliquemos cada término de la Ecuación 28-51 por el valor de la corriente I. Entonces se tiene

$$IL\frac{dI}{dt} + I\frac{Q}{C} + I^2R = 0 \qquad \text{28-52}$$

El primer término de esta ecuación es la corriente multiplicada por la tensión que aparece en los extremos de la bobina. Equivale al ritmo mediante el cual se le da a la bobina o se extrae de ella energía es decir la velocidad de cambio de la energía magnética, que es positiva o negativa dependiendo de que I y dI/dt tengan los mismos o diferentes signos. Análogamente, el segundo término es igual a la corriente multiplicada por la tensión entre las armaduras del condensador. Este término equivale a la variación de la energía del condensador. De nuevo puede ser positivo o negativo. El último término I^2R, la velocidad a la que se disipa energía en la resistencia en forma de calor Joule, es siempre positivo independientemente del signo de la corriente puesto que sólo depende de I^2. Las sumas de las energías eléctrica y magnética no es constante en este circuito debido a que la energía está disipándose continuamente en la resistencia. La Figura 28-28 muestra unos gráficos de Q y de I en función de t en el caso de resistencia

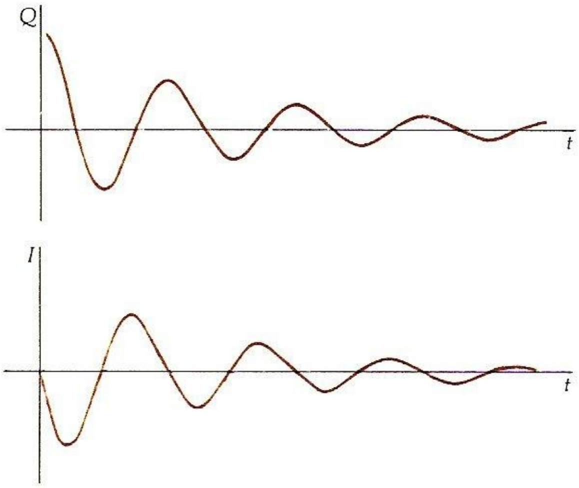

Figura 28-28
Gráficos de Q en función de t y de I en función de t en el caso del circuito LCR de la Figura 28-27, cuando la resistencia R es pequeña.

pequeña. Si aumentamos R, las oscilaciones se ven amortiguadas más intensamente hasta que se alcanza un valor crítico de R para el cual no existe ni siquiera ninguna oscilación. La Figura 28-29 muestra la carga en función de t cuando R es mucho mayor que el valor de amortiguamiento crítico. La solución detallada de la Ecuación 28-51 es exactamente análoga a la solución de la Ecuación 11-39 en el caso del oscilador armónico amortiguado y no se estudiará aquí.

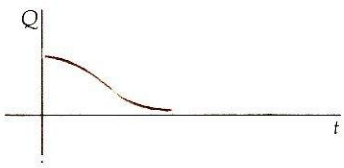

Figura 28-29
Gráfico de Q en función de t para una resistencia muy grande en el circuito LCR de la Figura 28-27.

Cuestiones

8. No es difícil preparar circuitos LC con frecuencias de oscilación de millares de hertz o más, pero sí que es difícil construir circuitos LC con pequeñas frecuencias. ¿Por qué?

9. ¿Cómo se verá alterada la frecuencia de un circuito LCR si se duplica la autoinducción del circuito? ¿Se duplica la capacidad? ¿Se duplica la tensión con que se cargó inicialmente el condensador? ¿Se duplica la resistencia del circuito?