Transformada de Fourier

INTRODUCCIÓN
En una primera aproximación, podemos decir que todos los dominios transformados, que se utilizan dentro del tratamiento digital de imagen, tienen la misma forma básica que puede expresarse como:

$$T(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} I(x,y)\, b(x,y,u,v)$$

donde *T* es la imagen transformada, *I* la imagen de entrada, de tamaño *M* x *N*, y *b* es la función base de la transformación.

De la Ec. (2.1) se deduce el hecho de que el resultado de cada pixel depende de todos los pixels de la imagen de entrada. Cada pixel de la imagen de entrada, se multiplica por el término apropiado de la función base correspondiente a la transformada y se añade a la suma.

A simple vista, es evidente que el cálculo directo de una ecuación de este tipo lleva asociado un número considerable de operaciones. Pero esta carga computacional puede reducirse en gran medida si la función base de la transformación es *separable*. Afortunadamente, las transformadas más usuales, incluyendo la transformada de Fourier, tienen funciones base separables. Además, la variedad de aplicaciones que encuentran las transformadas ha contribuido al desarrollo de métodos muy eficientes para su cálculo.

TRANSFORMADA DE FOURIER
Hasta cierto punto, la transformada de Fourier es como un segundo lenguaje para describir funciones. Las personas bilingües encuentran frecuentemente un lenguaje mejor que otro para expresar sus ideas. De forma similar, en el tratamiento digital de imagen uno debe elegir entre el dominio espacial y el dominio frecuencial a la hora de afrontar la *mayoría* de los problemas.

Cuando se empieza a aprender un idioma nuevo una persona tiende a pensar en su lengua materna y mentalmente traduce antes de hablar. Sin embargo, una vez que se consigue fluidez uno puede pensar en cualquier idioma.

Por tanto, necesitamos familiarizarnos con la transformada de Fourier para poder pensar tanto
en el dominio espacial como en el frecuencial y elegir el más adecuado en cada situación. Para conseguirlo es necesario combinar un conocimiento teórico de

las **propiedades** de la transformada de Fourier, con el correspondiente práctico de su **interpretación física**.

Con esta idea, este capítulo desarrolla la transformada de Fourier, recorriendo desde el caso Fig. 2.1. Interpretación de la Transformada de Fourier unidimensional continuo hasta el bidimensional discreto, sin olvidarnos del interés que merece la transformada rápida de Fourier y su implementación.

TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER

El físico francés, Joseph Fourier (1768-1830), desarrolló una representación de funciones basada en la frecuencia, que ha tenido una gran importancia en numerosos campos de matemáticas y ciencia.
Una interpretación simplificada de la transformada de Fourier se ilustra en la siguiente figura Como se muestra, la teoría que Fourier desarrolló, propone que mediante la suma de señales co/sinusoidales de diferentes amplitudes, frecuencias y fases, es posible construir casi cualquier función arbitraria.

Dentro de este conjunto de señales puede existir una con frecuencia cero, que es un término constante, a menudo referido como la componente continua (DC), debido al hecho de que cierta terminología en este área está derivada del procesado de señal y electrónica.

La representación gráfica de la transformada de Fourier es un diagrama, denominado espectro de Fourier, donde se representa la frecuencia y amplitud de cada una de las componentes sinusoidales determinadas.

La Fig. 2.1 presenta un ejemplo de la transformada de Fourier de una señal sencilla. La transformada de Fourier se compone de dos sinusoides, que sumadas producen la forma de onda de partida.

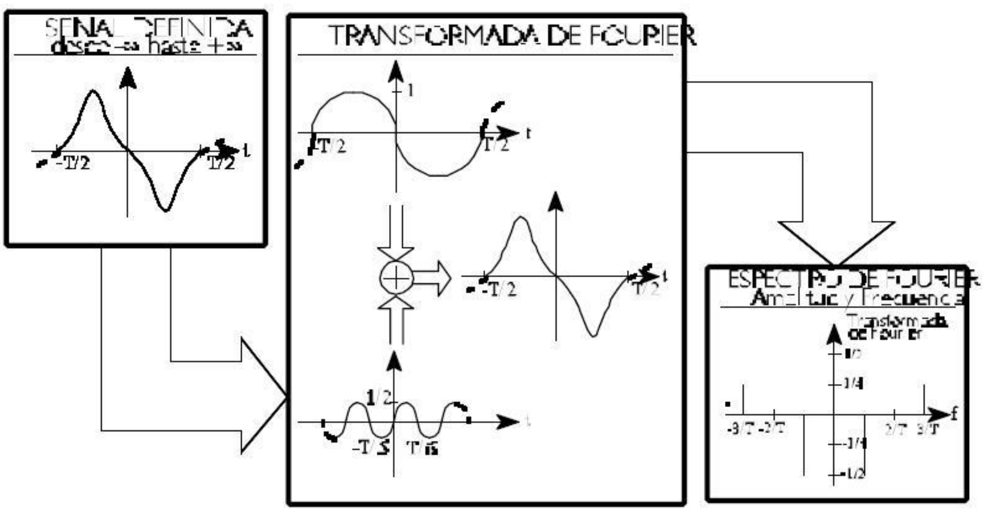


Fig. 2.1. Interpretación de la Transformada de fourier

Como se ve, el gráfico de la transformada de Fourier representa tanto la amplitud como la frecuencia. Hemos seguido el convenio general, mostrando sinusoides de frecuencia positiva y negativa Fig. 2.2. Transf. de Fourier de un pulso de duración finita para cada frecuencia.

Matemáticamente, la transformada de Fourier se expresa como:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-j2\pi ft} dt$$

donde, *s*(*t*) es la señal que se va a descomponer en una suma de sinusoides, *S*(*f*) la transformada de *s*(*t*), y *j*= /-1.

Normalmente asociaremos el análisis de funciones periódicas tales como una señal cuadrada con las series de Fourier más que con la transformada de Fourier. No obstante, la serie de Fourier es un caso especial de la transformada de Fourier.

Si la señal *s*(*t*) no es periódica, entonces la transformada de Fourier será una función continua en frecuencia, es decir, *s*(*t*) estará representada mediante la suma de sinusoides de todas las frecuencias.

Para ilustrarlo, la Fig. 2.2 muestra un pulso de duración finita y su transformada de Fourier, de donde se deriva que una frecuencia sinusoidal llega a ser indistinguible de la siguiente y, por tanto debemos considerar todas las frecuencias.

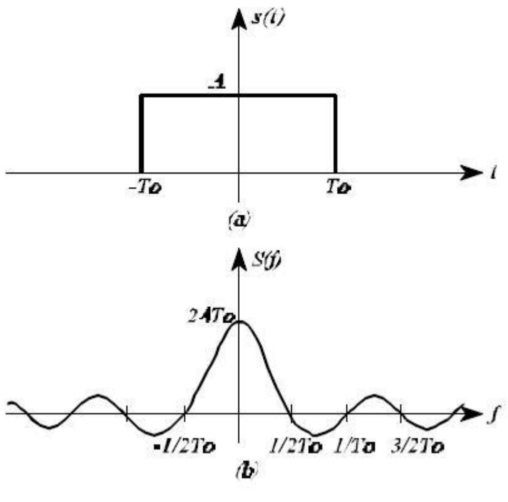


Fig. 2.2. Transf. de Fourier de un pulso de duración finita

En conclusión, la transformada de Fourier es una representación en el dominio de la frecuencia de una función. Como indican las Figuras. 2.2 y 2.3, el dominio de la frecuencia de la transformada Fig. 2.3.

Transformada de Fourier de una onda cuadrada Fourier contiene exactamente la misma información que la función original, únicamente se diferencian en la forma de representarla.

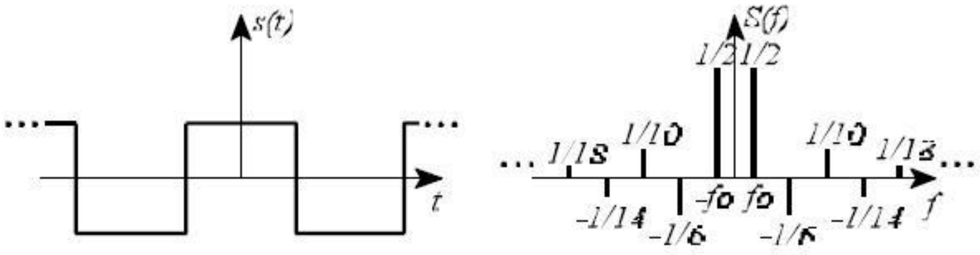


Fig. 2.3. Transformada de Fourier de una onda cuadrada

La importancia de la transformada de Fourier radica en que permite representar funciones complicadas de forma que presenten propiedades muy útiles, que a menudo facilitan el tratamiento de la función original. La visualización simultánea de una función y su transformada de Fourier es, en muchas ocasiones, la clave del éxito para solucionar problemas.

Acabamos de ver unos conceptos generales sobre la transformada de Fourier aplicada a señales continuas genéricas, pero conviene dar una interpretación de los mismos en el caso de trabajar con imágenes, para lo cual es necesario realizar algunas aclaraciones.

En primer lugar, una imagen puede considerarse como una función de dos variables. Las variables son las coordenadas *x* e *y* de un pixel dado y el valor de la función es el valor del pixel.

El concepto de **frecuencia** en el procesado de imagen se utiliza normalmente para referirse a frecuencia *espacial*, y aunque la palabra *frecuencia* se suele asociar a variaciones en tiempo, es importante tener claro que se refiere a la frecuencia con la que una señal (la imagen) varía como una función de las coordenadas espaciales.

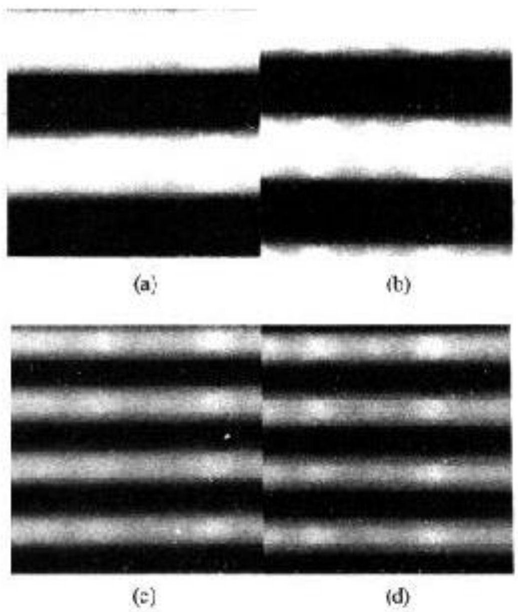
De esta definición se deduce que hay un paralelismo absoluto entre una imagen y su espectro de frecuencias espaciales; es decir, las imágenes que varían gradualmente (sin cambios bruscos de amplitud - luminancia-) tienen bajas frecuencias espaciales, y aquellas con mucho detalle y bordes nítidos tienen altas frecuencias espaciales. Es este tipo de frecuencia al que nos referiremos cuando hablemos de los componentes de frecuencia de una imagen, que calcularemos utilizando la transformada de Fourier.

Por consiguiente, la transformada de Fourier puede utilizarse para generar una nueva representación de la imagen basada en las frecuencias espaciales y manteniendo toda la información
de la original, pero...

...¿ *Cómo puede representarse una imagen en términos de frecuencias espaciales ?*

Inicialmente, consideraremos que una frecuencia espacial determinada describe una onda sinusoidal que se repite un número específico de veces sobre una distancia dada. Las unidades en las que se expresan las frecuencias espaciales son arbitrarias; a veces se relacionan con el tamaño de la imagen y otras veces con el tamaño de un pixel. Para algunas aplicaciones es importante tener alguna medida absoluta, en cuyo caso puede necesitarse la distancia real representada por cada pixel.

La siguiente figura muestra una sencilla imagen sinusoidal verticalmente orientada, **Figura 2.4:** *(a) imagen sinusoidal orientada verticalmente,(b) con fase de 45º; (c)y (d) con menor amplitud*.



En la Fig. 2.4 se observa una frecuencia espacial de dos ciclos dentro de la altura de la imagen.

Los valores de los pixels en la imagen varían entre -100 y 100. La imagen sinusoidal se dice que tiene una **amplitud** de 100. Para su interpretación visual, el negro representa -100 y el blanco máximo 100.

Un gris de medio tono representa 0. La Fig. 2.5 muestra la relación existente entre la escala utilizada (-100 .. 100) y el rango dinámico de la imagen cuantificada con 8 bits (0 .. 255 niveles de gris)

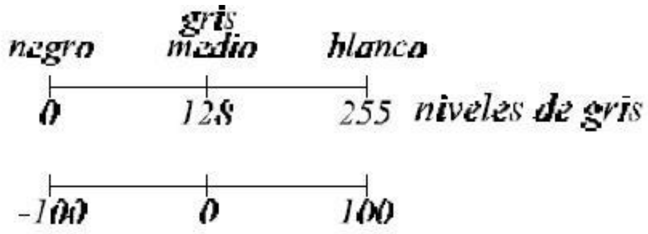


Figura 2.5: *Relación entre los valores (-100..100) de los pixels y el rango dinámico (0..255 niveles de gris).*

Aparte de amplitud y frecuencia, se requiere un tercer parámetro para caracterizar completamente una onda sinusoidal. La **fase** de una imagen de tipo sinusoidal representa en que punto, a lo largo de su longitud, tiene lugar el primer cruce por cero. La imagen en la Fig. 2.4 (b) pasa por cero después de 1/8 de ciclo.

Es común representar la fase como una medida angular, siendo equivalente un ciclo de la onda a 360º ó 2B radianes. La fase de la onda sinusoidal en la Fig. 2.4 (b) es 45º.

En la Fig. 2.4 también podemos ver una onda sinusoidal de frecuencia más alta, con una amplitud menor, para las fases de 0º y -45º (Fig's. 2.4(c) y 2.4(d) respectivamente).

De la teoría de Fourier, se desprende que mediante la adición de diferentes componentes co/sinusoidales podríamos conseguir cualquier **imagen** arbitraria. Si miramos a cualquier imagen cotidiana, uno puede no sentirse a gusto con la idea de que puede representarse mediante un gran número de señales simples.

En efecto, la representación en frecuencia espacial de tal imagen es necesariamente complicada. Sin embargo, la imagen mostrada en la Fig. 2.6(a) es mucho más simple.

Como una demostración de la técnica de Fourier construiremos esta imagen a partir de sus componentes de frecuencia espacial. Las imágenes en la Fig. 2.6(b)-(g) muestran el efecto de añadir sucesivamente más componentes.
En este caso particular, cada componente es una señal sinusoidal, con amplitud, frecuencia y fase elegida con arreglo a la teoría de Fourier, no siendo necesario el uso de señales co/sinusoidales.

Para conseguir el modelo bidimensional utilizamos señales sinusoidales a lo largo de la dirección *x* y a lo largo de la dirección *y*.

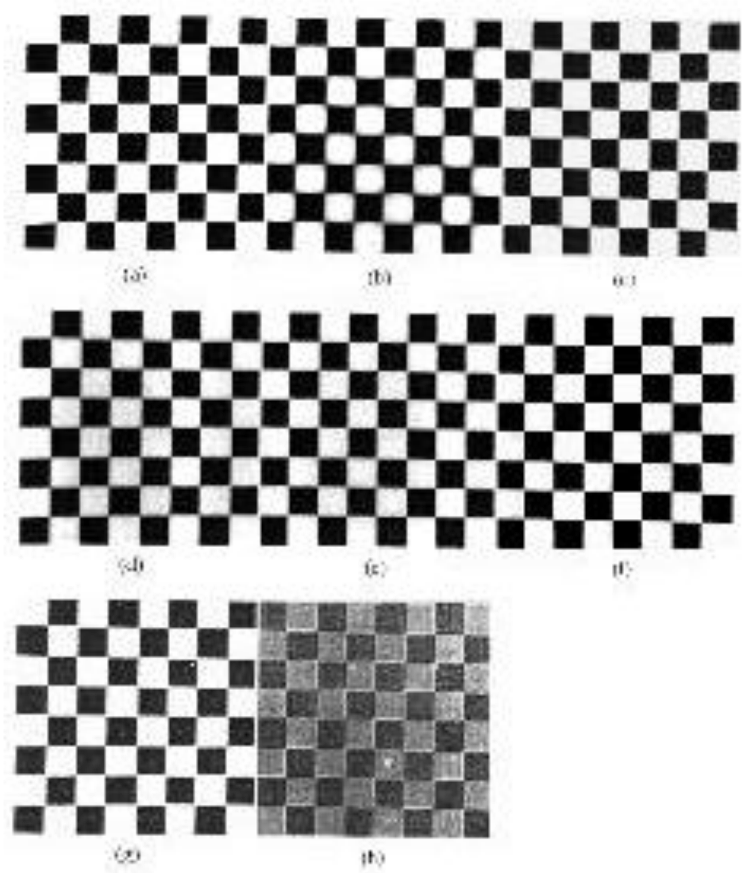


Figura 2.6: *Síntesis a partir de los componentes de Fourier.*
(a) Imagen a descomponer.
(b) efecto del primer componente sólo.
(c) resultado de añadir el segundo componente.
(d) efecto de añadir el tercer componente.
(e)suma del cuarto componente,
(f) quinto componente,
(g) sexto componente,
(h) diferencia residual.

Si añadimos cada vez más componentes, la imagen resultante se asemejará en mayor grado a la imagen original (Fig. 2.6(a)).Por lo tanto, mediante la adición de un número suficiente de componentes podemos generar la imagen resultante con una buena aproximación. La Fig. 2.6(h) muestra las diferencias que existen entre la imagen sintetizada y la original. En la imagen residual, los grises medios indican diferencia cero, el blanco indica que los componentes de Fourier son demasiado grandes y el negro que son demasiado pequeños. Está claro que los componentes dan una buena representación de la imagen original.

El conjunto particular de señales sinusoidales usadas para esta imagen esta basado en las series (Ec.2.3):

$$S(x) = sen\left(\omega \frac{2\pi}{N}x\right) + \frac{1}{3} sen\left(3\omega \frac{2\pi}{N}x\right) + \frac{1}{5} sen\left(5\omega \frac{2\pi}{N}x\right) +$$
$$\frac{1}{7} sen\left(7\omega \frac{2\pi}{N}x\right) + \frac{1}{9} sen\left(9\omega \frac{2\pi}{N}x\right) + \frac{1}{11} sen\left(11\omega \frac{2\pi}{N}x\right)$$

Esta ecuación bidimensional muestra la situación de la imagen resultante a lo largo de una fila simple. Se obtiene una expresión similar para la variación de luminancia a lo largo de una columna.

En la ecuación, *N* es el número de pixels en una fila y T representa la frecuencia de la primera componente sinusoidal.

Es interesante aclarar el método que se ha empleado para generar una imagen a partir de componentes sinusoidales. De un primer vistazo a la Fig. 2.6, se distinguen 4 ciclos en la anchura de la imagen. Esto es lo mismo que el número de pares de cuadrados blancos y negros a lo largo de una fila de la imagen original.

La Ec.(2.2) , por sí misma, no conducirá al modelo de la Fig. 2.6(a). Si , por ejemplo, simplemente aplicáramos la ecuación a cada fila, el resultado coincidiría con las primeras filas de la imagen original. Sin embargo, dicha figura presenta un cambio periódico de cuadrados blancos y negros tanto a través de cada columna como a lo largo de cada fila. Por lo que, necesitamos desplazar periódicamente, la posición de comienzo de la función definida mediante la Ec. (2.2). Esto es equivalente a alterar la fase de las componentes sinusoidales.

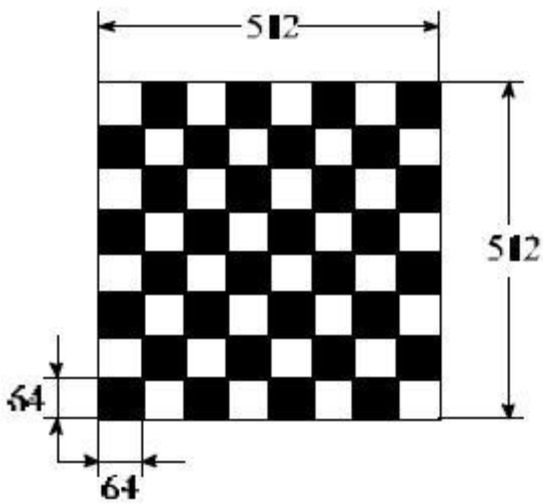


Figura 2.7: *Tamaño de los detalles de la Fig. 2.6*.

En realidad, las imágenes de la Fig. 2.6 son cuadrados de 512 pixels; por tanto, los cuadrados pequeños son de 64 pixels como muestra la figura 2.7.
De esta manera, después de cada 64 filas, la fase de las componentes sinusoidales en la Ec.

(2.2) se debe cambiar añadiendo B al ángulo utilizado en el cálculo. Siguiendo el mismo método, se pueden generar las componentes en la dirección *y*.
De hecho, si los cálculos realmente se hubieran llevado a cabo de esta forma, habría sido necesario un enorme número de operaciones trigonométricas. En realidad, sólo se calculó una fila en cada caso, que más tarde era copiada para producir un conjunto de 64 filas idénticas. Una vez que se generó esta imagen, conteniendo todos los componentes de la dirección *x*, se utilizó una simple operación traspuesta para producir los componentes equivalentes de la dirección *y*.

Aunque no es el camino de una completa justificación de la teoría de Fourier, esta ilustración muestra que, en efecto, es posible construir una imagen a partir de un conjunto de señales sinusoidales, con tal de elegir adecuadamente su frecuencia, amplitud y fase.

La cuestión de cómo un conjunto de ondas seno y coseno representa la imagen original es algo interesante. Después de todo, una imagen digital es por si misma una aproximación del modelo de luminancia que existía cuando fue capturada, ya que el muestreo del modelo de luminancia, ha introducido una limitación en la posible resolución espacial de la imagen. Es decir, los cambios de luminancia que ocurren en la anchura de un pixel claramente no pueden ser directamente grabados.

Esto puede pensarse como un límite de las frecuencias espaciales que necesitan emplearse para representar el modelo de luminancia con tanta exactitud como la imagen en el dominio espacial.

Las ondas co/sinusoidales con períodos mucho menores que la anchura de un pixel no introducen esencialmente contribución al valor del pixel. Por lo que pasaran a través de muchos ciclos en la anchura de los pixels y su contribución será promediada. Esos promedios están muy cercanos al cero.

Sin embargo, cuando el período es de aproximadamente la anchura de un pixel llegamos a una situación límite. A frecuencias más bajas, aparecen contribuciones significantes. Aunque por encima de esta frecuencia, las contribuciones son pequeñas y decrecientes.

Por consiguiente, las señales de frecuencia más alta, normalmente empleadas en la representación de una imagen, son aquellas con un período igual a la anchura de un pixel. La demostración de estos resultados esta más allá del propósito del libro. Sin embargo, conviene señalar que los resultados son importantes para la fidelidad de la representación en el dominio de la frecuencia.

Fig. 2.8. Representación de la T. de Fourier como una imagen
Ahora que hemos visto que es posible construir una imagen a partir de un conjunto de componentes con varias frecuencias espaciales, necesitamos dirigir la cuestión de cómo representar correctamente la información del dominio de la frecuencia.

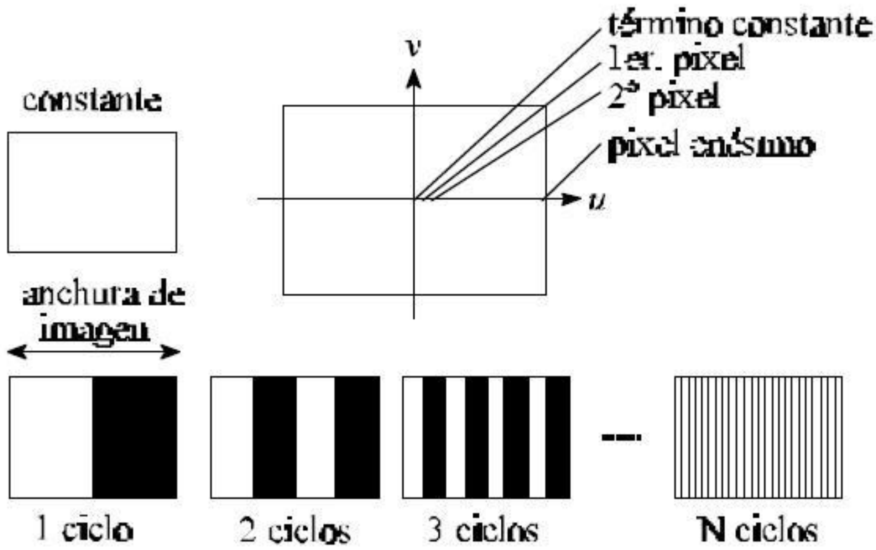
Recapitulando, sabemos que cada componente tiene una amplitud asociada, frecuencia y fase, y que hay dos dimensiones espaciales. La representación de la transformada de Fourier de una imagen es otra imagen, en la cual el eje *u* representa frecuencias espaciales a lo largo del eje *x* de la imagen original, y el eje *v* representa frecuencias espaciales a lo largo del eje *y* de la imagen original.

Por convenio se suele representar la transformada con su eje *u* horizontal.
Ya hemos apuntado que la componente de frecuencia más alta en la transformada tiene un período igual a la anchura de un pixel.

Por lo que su frecuencia es de 1 ciclo por pixel. De forma resumida, podemos comentar que la representación de la transformada discreta de Fourier es una imagen compuesta por pixels que representan las componentes de frecuencia espacial.

La posición de cada pixel codifica las frecuencias espaciales que representa, una en la dirección *x* y otra en la dirección *y,* de la imagen original.

Cuanto más lejos esté un pixel del origen mayor será la frecuencia espacial que representa. La amplitud y la fase de las señales co/sinusoidales se codifican como un valor complejo en el pixel correspondiente de la imagen.



Como aclaración, la Fig. 2.8 muestra las frecuencias espaciales representadas por los pixels situados sobre el eje *u* (que únicamente codifican frecuencias a lo largo del eje *x* de la imagen original), en el caso de que la transformada sea del mismo tamaño que la original.

El origen contiene el término constante, el siguiente pixel representa la frecuencia de 1 ciclo/imagen, el siguiente 2 ciclos y así sucesivamente. El último pixel representa la frecuencia de N ciclos/imagen, o 1 ciclo por pixel, siendo N el número de pixels a lo largo de la dimensión de interés de la imagen.

En conclusión, aunque las ecuaciones de la transformada de Fourier pueden parecer complicadas a primera vista (como veremos más adelante), no es necesario tener un profundo entendimiento de estas ecuaciones para comprender las aplicaciones de la transformada de Fourier; no obstante, es importante conocer sus propiedades y sobre todo saber que después de realizar la transformada, los datos se almacenan en una imagen y cómo son almacenados, para poder interpretar estas imágenes.

Cómo repaso a los conceptos básicos y las ecuaciones de la transformada de Fourier, vamos a ver su desarrollo matemático, comenzando por la transformada continua de Fourier unidimensional, que se define mediante el siguiente par transformado:

TRANSFORMADA DE FOURIER CONTINUA UNIDIMENSIONAL

$$\mathcal{F}\,[f(x)] = F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot e^{-j2\pi ux}\,dx$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(u)] = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\cdot e^{j2\pi ux}\,du$$

donde *f* (x) es una función continua de variable real *x*, y *u* es la variable frecuencia (corresponde a las frecuencias espaciales). Las ecuaciones, denominadas par transformado de Fourier, existen si *f*(x) es continua e integrable y *F*(u) es integrable respectivamente. Estas condiciones se cumplen casi siempre en la práctica.

En general, la transformada de Fourier de una señal (aunque sea real) presenta parte real y parte imaginaria, por lo que podremos expresarla de cualquiera de las dos siguientes maneras:

$$F(u) = R(u) + jI(u)$$

$$F(u) = |F(u)|\, e^{j\phi(u)}$$

o bien

$$|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)}$$

$$\phi(u) = arctg\left(\frac{I(u)}{R(u)}\right)$$

donde *$F(u)$* representa el módulo del espectro de Fourier, y N(u) el ángulo de fase. El cuadrado del espectro,

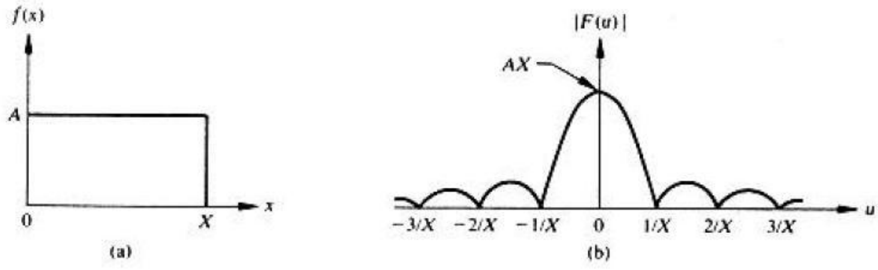
$$P(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u)$$

Fig. 2.9. Una función sencilla y su Transformada de Fourier se denomina espectro de potencia de $f(x)$, o también *densidad espectral*.

El término " *frecuencial* " asociado a la variable u surge de la expresión del elemento exponencial a través de la fórmula de Euler:

*e-j2*B*ux* = cos (2B*ux*) - *j* sen (2B*ux*) (2.4)

$$e^{-j2\bullet ux} = \cos(2\bullet ux) - j\ \mathrm{sen}(2\bullet ux)$$



Ejemplo 2.1: Consideraremos la función mostrada en la Fig. 2.9(a). Su espectro de Fourier se obtiene a partir del par transformado, de la siguiente forma:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx = \int_{0}^{X} A e^{-j2\pi ux} dx =$$

$$= \frac{-A}{j2\pi u} [e^{-j2\pi ux} |_{0}^{X}] = \frac{-A}{j2\pi u} [e^{-j2\pi uX} - 1] =$$

$$= \frac{A}{j2\pi u} [e^{j\pi uX} - e^{-j\pi uX}] e^{-j\pi uX} =$$

$$= \frac{A}{\pi u} sen(\pi uX) e^{-j\pi uX}$$

que es una función compleja.

El espectro de Fourier viene dado por :

$$|F(u)| = \left|\frac{A}{\pi u}\right| |sen(\pi uX)| \, |e^{-j\pi uX}| = AX \left|\frac{sen(\pi uX)}{(\pi uX)}\right|$$

La transformada de Fourier puede ampliarse con suma facilidad a funciones de dos variables.

Si una función *f*(*x*,*y*) es integrable, puede asegurarse la existencia de *F*(*u*,*v*) (siendo *u* y *v* las variable en el dominio de la frecuencia), que se calcula de acuerdo con el par bidimensional, De la misma forma que en el caso unidimensional, pueden calcularse el espectro de Fourier, la fase y el espectro de potencia, a partir de las siguientes expresiones:

$$|F(u,v)| = \sqrt{R^2(u,v) + I^2(u,v)}$$

$$\phi(u,v) = \operatorname{arctg}\left(\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right)$$

$$P(u,v) = |F(u,v)|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v)$$

donde *R* e *I* representan, respectivamente, las partes real e imaginaria de la transformada de Fourier.

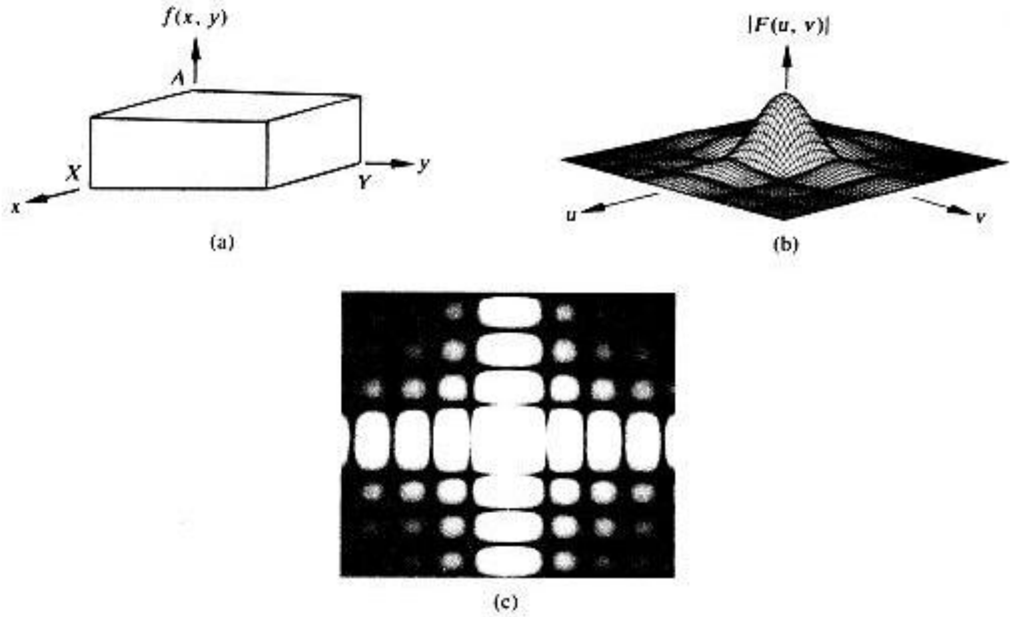


Figura 2.10: *(a) Una función bidimensional, (b) su espectro de Fourier, y (c) el espectro representado con o una función de intensidad.*

Ejemplo2.2: La transformada de Fourier de la función que aparece en la Fig. 2.10 (a) se calcula de la forma:

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, e^{-j2\pi(ux+vy)}\, dx dy =$$

$$= A\int_{0}^{X} e^{-j2\pi ux}\, dx \int_{0}^{Y} e^{-j2\pi vy}\, dy = A\left[\left.\frac{e^{j2\pi ux}}{j2\pi u}\right|_{0}^{X}\right]\left[\left.\frac{e^{j2\pi vy}}{j2\pi v}\right|_{0}^{Y}\right] =$$

$$= \frac{A}{-j2\pi u}\left[e^{-j2\pi uX}-1\right]\frac{1}{-j2\pi v}\left[e^{-j2\pi vY}-1\right] =$$

$$= AXY\left[\frac{\mathrm{sen}\,(\pi uX) e^{-j\pi uX}}{(\pi uX)}\right]\left[\frac{\mathrm{sen}\,(\pi vY) e^{-j\pi vY}}{(\pi vY)}\right]$$

El espectro viene dado por la expresión:

$$|F(u,v)| = AXY\left|\frac{\mathrm{sen}(\pi uX)}{(\pi uX)}\right|\left|\frac{\mathrm{sen}(\pi vY)}{(\pi vY)}\right|$$

La Fig. 2.10 (b) muestra la representación de esta función en perspectiva bidimensional. Por otro lado la Fig. 2.10(c) representa el espectro como una función de la intensidad, donde la luminancia es proporcional a la amplitud de

#*F*(*u*,*v*)# .

Para finalizar la transformada continua de Fourier, la Tabla 2.1 ofrece un resumen de sus propiedades, las más importantes.

Operación espacial	Operación en frecuencia	Comentarios
1. Linealidad af1(x,y)+bf2(x,y)	Linealidad aF1(u,v)+bF2(u,v)	En ambos dominios aparece la linealidad. El espectro de la suma lineal de imágenes es igual a la suma lineal de los espectros.
2. Cambio de escala f(ax,by) (1/*ab*)	Escalado inverso F(u/a,v/b)	Invarianza en espacio - ancho de banda. Comprimir una función espacial hace que su espectro se expanda y que se reduzca su amplitud en el mismo factor. La amplitud disminuye porque la misma energía ocupa un mayor ancho de banda. Para a=b=-1, la función espacial se invierte. Los ejes frecuenciales también se invierten, los cuales, para imágenes reales, cambian sólo sus espectros de fase.
3. Desplazamiento de la posición f(x-a,y-b)	Adición de fase lineal F(u,v) A exp[-j(ua+vb)]	Desplazar o trasladar la función espacial una cantidad x=a añade una fase 2=ua a la fase original. De la misma manera, un filtro de fase lineal produce una traslación de la imagen. El módulo del espectro es invariante a la traslación.
4. Modulación exp[j(u0x+v0y)/N]Af(x,y)	Desplaza m. del espectro F(u-u0, v-v0)	La multiplicación de una función espacial por una sinusoide compleja hace que su espectro se traslade al centro de u0 , v0.
5. Convolución f(x,y)*g(x,y)	Multiplicación F(u,v)AG(u,v)	La convolución de dos funciones espaciales

		corresponde al producto de los espectros individuales.
6. Multiplicación f(x,y)Ag(x,y)	Convolución F(u,v)*G(u,v)	El producto de dos funciones espaciales corres ponde a la convolución de sus espectros.
7. Correlación f(x,y)Bg(x,y)	Producto conjugado F(u,v)AG*(u,v)	La correlación de dos funciones espaciales corresponde al producto de un espectro multiplicado por el espectro conjugado de la otra función.
8. Rotación f(xcos2+ysen2, -xsen2+ycos2)	Rotación F(ucos2+vsen2, -usen2+vcos2)	La rotación de una función un ángulo 2 hace que el espectro rote ese mismo ángulo. Ni el módulo ni la fase de los espectros son invariantes a la rotación.
9. Diferenciación d^n f(x,y) / dx^n	Filtro Paso Alto (ju)n A F(u,v)	La derivada de una función espacial en cual quier dirección corresponde a la forma de un filtro paso alto (que agudiza imágenes).
10. Integración f(",y) (d")n	Filtro Paso Bajo (ju)- n A F(u,v)	La integral de una función en cualquier dirección corresponde a la forma de un filtro paso (desde -4 hasta x) bajo (que suaviza la imagen).

Tabla 2.1: *Propiedades de la transformada de Fourier continua bidimensional.*
Hay que tener presente que las imágenes digitales son señales bidimensionales discretizadas, en lugar de continuas, por lo que cuando se habla de transformada de Fourier en el tratamiento digital de imagen, se debe asociar a la transformada **discreta** de Fourier (DFT), que veremos a continuación con mayor detalle.

SÍNTESIS

*** Fases del tratamiento de imagen en el dominio transformado:**

1. Aplicar la transformada sobre la imagen original ÿ se genera la imagen transformada.
2. Procesar la imagen transformada.
3. Calcular la transformada inversa ÿ se obtiene la imagen original procesada.

* La transformada de una imagen es otra imagen de iguales dimensiones.
* Toda imagen puede representarse mediante su espectro en el dominio de la frecuencia.
* La frecuencia espacial se define como la distribución espacial de iluminaciones, que sigue una ley sinusoidal caracterizada por su amplitud, frecuencia y fase.
*Los coeficientes de la imagen transformada contienen información sobre su composición espectral.
* La transformada discreta de Fourier bidimensional es la que se utiliza típicamente en el tratamiento digital de imagen.
* No hay que olvidar que la transformada de Fourier no es más que un modelo matemático para describir un modelo físico.