

*Ley de Faraday*

963

y la autoinducción es

$$L = \mu_0 n^2 \ell A$$

Sustituyendo en la Ecuación 28-36 que nos da la energía de una bobina, el valor de  $I$  por esta expresión y el de  $I$  por  $B/\mu_0 n$  para la corriente, tenemos

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \ell A \left( \frac{B}{\mu_0 n} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} \ell A$$

La energía almacenada en un solenoide puede escribirse como el producto del volumen  $\ell A$  y el término  $1/2 B^2/\mu_0$ . Una vez más, el resultado es más general que el indicado aquí. Siempre que se establece un campo magnético en un volumen  $\mathcal{V}$  del espacio, se almacena en él energía. La energía por unidad de volumen  $\eta_m$  es

$$\eta_m = \frac{U_m}{\mathcal{V}} = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad 28-38$$

*Densidad de energía magnética*

Vemos que existe energía almacenada tanto en los campos eléctricos como en los magnéticos. En general, si existe un campo eléctrico  $E$  y un campo magnético  $B$  en un determinado volumen del espacio, la energía por unidad de volumen asociada con estos campos es

*Densidad de energía total*

$$\eta = \frac{U}{\mathcal{V}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad 28-39$$

## 28-9 Circuitos LC y LCR

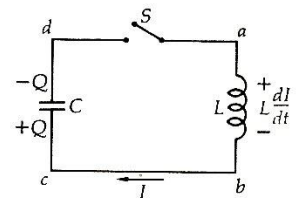
La Figura 28-25 muestra un condensador conectado a una bobina y a un interruptor. Supongamos que el condensador tiene una carga inicial  $Q_0$  y que el interruptor está inicialmente abierto. En el instante  $t = 0$  cerrados el interruptor y empieza a fluir la carga por la bobina. Para mayor sencillez, despreciaremos la resistencia del circuito.

Hemos escogido el sentido de circulación de la corriente en el circuito de modo que cuando la carga en la placa inferior del condensador es  $+Q$ , la corriente es

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Esta selección del sentido es totalmente arbitraria. Con esta selección la corriente sería negativa en el instante después de cerrar el interruptor. Habiendo elegido así el sentido positivo de la corriente, la caída de potencial a través de la bobina desde el punto  $a$  hasta el  $b$  es  $L \, dI/dt$ . A través del condensador desde  $c$  hasta  $d$  existe una caída de potencial  $Q/C$ . Así pues la regla de Kirchhoff aplicada a este circuito nos da

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad 28-40$$



**Figura 28-25**  
Circuito LC. El condensador está cargado inicialmente. La carga sobre las placas y la corriente  $I$  están relacionadas entre sí por la expresión  $I = dQ/dt$  en el caso que el sentido de la corriente sea el indicado. En el instante después de cerrar el interruptor,  $I$  es negativa.

Sustituyendo el valor de  $I$  en esta ecuación por  $dQ/dt$ , se obtiene que la carga  $Q$  del condensador está obligada a cumplir la condición

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0$$

o sea

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC} Q \quad 28-41$$

La Ecuación 28-41 tiene la misma forma que la ecuación correspondiente a la aceleración de una masa situada en un muelle,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

en donde  $\omega^2 = k/m$ ,  $k$  es la constante del muelle y  $m$  es la masa.

En el Capítulo 11 estudiamos las soluciones de esta ecuación en el caso del movimiento armónico simple y vimos que siempre puede escribirse la solución en la forma

$$x = A \cos(\omega t + \delta)$$

en donde  $\omega = \sqrt{k/m}$  es la frecuencia angular,  $A$  es el valor máximo de  $x$  (denominado amplitud) y  $\delta$  es la constante de fase, que depende de las condiciones iniciales. Podemos poner la Ecuación 28-41 en la misma forma escribiendo  $\omega^2$  en lugar de la cantidad  $1/LC$ . Entonces

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = -\omega^2 Q \quad 28-42$$

*Frecuencia de un circuito LC*

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad 28-43$$

La solución de la Ecuación 28-42 es

$$Q = A \cos(\omega t + \delta) \quad 28-44$$

Se obtiene la corriente derivando esta solución:

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega A \text{ sen}(\omega t + \delta) \quad 28-45$$

En el caso de nuestras condiciones iniciales, la constante de fase  $\delta$  debe ser cero debido a que la corriente es cero en el instante  $t = 0$ . Haciendo  $t = 0$  en la Ecuación 28-45, tenemos

$$I_0 = -\omega A \text{ sen} \delta = 0$$

y, por tanto,  $\delta = 0$ . Por consiguiente, nuestra solución para el valor de la carga es

$$Q = A \cos \omega t$$

La constante  $A$  es precisamente el valor de la carga cuando  $t = 0$  puesto que  $\cos 0 = 1$ . Llamando  $Q_0$  a esta carga inicial, tenemos

$$Q = Q_0 \cos \omega t \quad 28-46$$

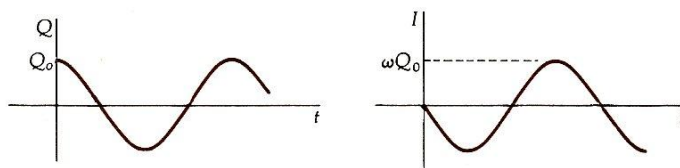
## Ley de Faraday

965

y

$$I = -\omega Q_0 \text{sen } \omega t \quad 28-47$$

La Figura 28-26 muestra los gráficos de  $Q$  e  $I$  en función del tiempo. La carga oscila entre los valores  $+Q_0$  y  $-Q_0$  con una frecuencia angular  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ . La corriente oscila también con esta frecuencia y está desfasada  $90^\circ$  con la carga. La corriente es máxima cuando la carga es cero y es nula cuando la carga es máxima.



**Figura 28-26**  
Gráfico de  $Q$  en función de  $t$  y de  $I$  en función de  $t$  para el circuito LC de la Figura 28-25.

En nuestro estudio de la oscilación de una masa situada sobre un muelle vemos que la energía total es constante pero oscila entre las formas de energía potencial y cinética. En nuestro circuito  $LC$  también tenemos dos tipos de energía, energía electrostática y energía magnética. La energía electrostática del condensador es

$$U_e = \frac{1}{2}QV = \frac{Q^2}{2C}$$

siendo  $V = Q/C$  la caída de tensión entre las armaduras del condensador. Sustituyendo  $Q$  en esta ecuación por  $Q_0 \cos \omega t$  tenemos para la energía electrostática del condensador

$$U_e = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2 \omega t \quad 28-48$$

La energía electrostática almacenada en el condensador oscila entre su valor máximo  $Q_0^2/2C$  y cero. Cuando la corriente en el circuito es  $I$ , la energía magnética almacenada en la bobina es

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2 \quad 28-49$$

Sustituyendo en esta expresión por el valor que nos da la Ecuación 28-47 para la corriente, obtenemos

$$U_m = \frac{1}{2}L\omega^2 Q_0^2 \text{sen}^2 \omega t = \frac{Q_0^2}{2C} \text{sen}^2 \omega t \quad 28-50$$

en donde hemos utilizado el hecho de que  $\omega^2$  es igual a  $1/LC$ . La energía magnética oscila también entre su valor máximo de  $Q_0^2/2C$  y cero. La suma de las energías electrostática y magnética es la energía total, que es constante a lo largo del tiempo:

$$U_{\text{total}} = U_e + U_m = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2 \omega t + \frac{Q_0^2}{2C} \text{sen}^2 \omega t = \frac{Q_0^2}{2C}$$

*Energía de un circuito LC*

**Ejemplo 28-3.** Un condensador de  $2\text{-}\mu\text{F}$  está inicialmente cargado a  $20\text{ V}$  y luego se cortocircuita con una bobina de  $6\text{-}\mu\text{H}$ . ¿Cuáles son la frecuencia de oscilación y el valor máximo de la corriente?

La frecuencia de oscilación es independiente de la carga inicial y depende sólo de la capacidad y de la autoinducción. La frecuencia es

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{(6 \times 10^{-6})(2 \times 10^{-6})}} = 4.59 \times 10^4 \text{ Hz}$$

De acuerdo con la Ecuación 28-47 el valor máximo de la corriente está relacionado con el valor máximo de la carga por

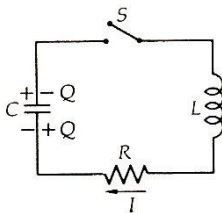
$$I_m = \omega Q_0 = \frac{Q_0}{\sqrt{LC}}$$

La carga inicial en el condensador es

$$Q_0 = CV_0 = (2 \mu\text{F})(20 \text{ V}) = 40 \mu\text{C}$$

Así pues

$$I_m = \frac{40 \mu\text{C}}{\sqrt{(6 \mu\text{H})(2 \mu\text{F})}} = 11.5 \text{ A}$$



**Figura 28-27**  
Circuito LCR.

En la Figura 28-27 incluimos una resistencia en serie con el condensador y la bobina. De nuevo admitiremos que el interruptor estaba inicialmente abierto, poseyendo el condensador una carga inicial  $Q_0$  y que luego cerramos el interruptor en el instante  $t = 0$ . Sólo necesitamos modificar la Ecuación 28-40 incluyendo la caída de potencial  $IR$  a través de la resistencia. Entonces tenemos, según la regla de Kirchhoff,

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + IR = 0$$

o sea

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} = 0 \quad 28-51$$

utilizando  $I = dQ/dt$  como antes. La Ecuación 28-51 es análoga a la Ecuación 11-39 correspondiente a un oscilador armónico amortiguado. Si la resistencia es pequeña, la carga y la corriente seguirán oscilando con casi la misma frecuencia  $1/\sqrt{LC}$  pero las oscilaciones son amortiguadas; es decir, los valores máximos de la carga y la corriente disminuyen en cada oscilación. Podemos comprender esto cualitativamente a partir de consideraciones energéticas. Multipliquemos cada término de la Ecuación 28-51 por el valor de la corriente  $I$ . Entonces se tiene

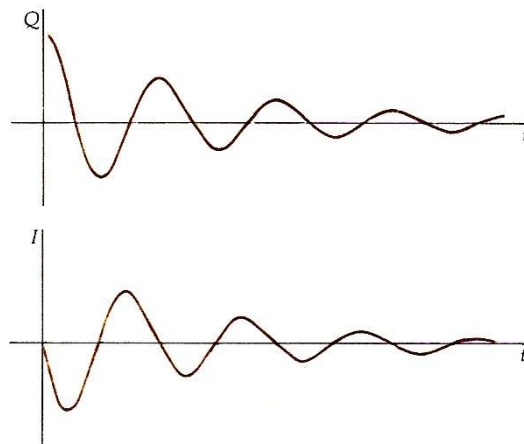
$$IL \frac{dI}{dt} + I \frac{Q}{C} + I^2 R = 0 \quad 28-52$$

El primer término de esta ecuación es la corriente multiplicada por la tensión que aparece en los extremos de la bobina. Equivale al ritmo mediante el cual se da

## Ley de Faraday

967

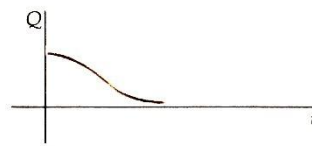
a la bobina o se extrae de ella energía es decir la velocidad de cambio de la energía magnética, que es positiva o negativa dependiendo de que  $I$  y  $dI/dt$  tengan los mismos o diferentes signos. Análogamente, el segundo término es igual a la corriente multiplicada por la tensión entre las armaduras del condensador. Este término equivale a la variación de la energía del condensador. De nuevo puede ser positivo o negativo. El último término  $I^2R$ , la velocidad a la que se disipa energía en la resistencia en forma de calor Joule, es siempre positivo independientemente del signo de la corriente puesto que sólo depende de  $I^2$ . Las sumas de las energías eléctrica y magnética no es constante en este circuito debido a que la energía está disipándose continuamente en la resistencia. La Figura 28-28 muestra unos gráficos de  $Q$  y de  $I$  en función de  $t$  en el caso de resistencia



**Figura 28-28**

Gráficos de  $Q$  en función de  $t$  y de  $I$  en función de  $t$  en el caso del circuito LCR de la Figura 28-27, cuando la resistencia  $R$  es pequeña.

pequeña. Si aumentamos  $R$ , las oscilaciones se ven amortiguadas más intensamente hasta que se alcanza un valor crítico de  $R$  para el cual no existe ni siquiera ninguna oscilación. La Figura 28-29 muestra la carga en función de  $t$  cuando  $R$  es mucho mayor que el valor de amortiguamiento crítico. La solución detallada de la Ecuación 28-51 es exactamente análoga a la solución de la Ecuación 11-39 en el caso del oscilador armónico amortiguado y no se estudiará aquí.



**Figura 28-29**

Gráfico de  $Q$  en función de  $t$  para una resistencia muy grande en el circuito LCR de la Figura 28-27.

## Cuestiones

8. No es difícil preparar circuitos  $LC$  con frecuencias de oscilación de millares de hertz o más, pero sí que es difícil construir circuitos  $LC$  con pequeñas frecuencias. ¿Por qué?
9. ¿Cómo se verá alterada la frecuencia de un circuito  $LCR$  si se duplica la auto-inducción del circuito? ¿Se duplica la capacidad? ¿Se duplica la tensión con que se cargó inicialmente el condensador? ¿Se duplica la resistencia del circuito?

3. La fem inducida en un circuito tiende siempre a disminuir el flujo magnético que atraviesa el circuito.
4. La ley de Faraday puede deducirse a partir de la ley de Biot-Savart.
5. La energía de un campo magnético es proporcional a  $B^2$ .

### Ejercicios

#### Sección 28-1, FEM de movimiento

1. Una varilla de 30 cm de longitud se mueve a 8 m/s en un plano perpendicular a un campo magnético de 500 G. Su velocidad es perpendicular a la longitud de la varilla. Hallar (a) la fuerza magnética ejercida sobre un electrón de la varilla, (b) el campo electrostático  $E$  existente en la varilla, (c) la diferencia de potencial  $V$  entre sus extremos.
2. Hallar la velocidad de la varilla del ejercicio 1 si la diferencia de potencial entre sus extremos es de 6 V.
3. En la Figura 28-5 sea  $B = 0,8$  T,  $v = 10,0$  m/s,  $\ell = 20$  cm, y  $R = 2$   $\Omega$ . Hallar (a) la fem inducida en el circuito, (b) la corriente en el circuito y (c) la fuerza necesaria para mover la varilla con velocidad constante suponiendo un rozamiento despreciable. (d) Hallar la potencia suministrada por la fuerza hallada en la parte (c) y la producción de calor  $I^2R$  por unidad de tiempo.
4. Resolver el Ejercicio 3 en el caso de  $B = 1,5$  T,  $v = 6$  m/s,  $\ell = 40$  cm y  $R = 1,2$   $\Omega$ .

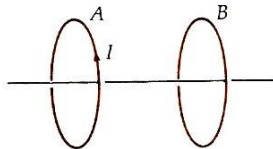


Figura 28-30  
Ejercicio 5.

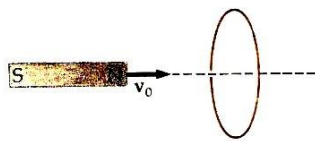


Figura 28-31  
Ejercicio 6.

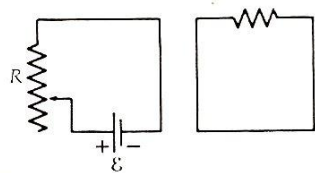


Figura 28-32  
Ejercicio 7.

#### Sección 28-2, Ley de Lenz y Sección 28-3, Aplicaciones de la ley de Faraday

5. Las dos espiras de la Figura 28-30 tienen sus planos paralelos entre sí. Cuando se mira desde  $A$  hasta  $B$  existe en  $A$  una corriente en sentido contrario a las agujas del reloj. Dar el sentido de la corriente en la espira  $B$  y establecer si las espiras se atraen o repelen entre sí, si la corriente en la espira  $A$  está (a) creciendo, (b) decreciendo.
6. Un imán en forma de barra se mueve con velocidad constante a lo largo del eje de una espira como se indica en la Figura 28-31. (a) Hacer un esquema cualitativo del flujo  $\phi_m$  que atraviesa la espira en función del tiempo  $t$ . Indicar el tiempo  $t_1$  en que el imán está la mitad introducido en la espira. (c) Hacer un esquema de la corriente  $I$  que hay en la espira en función del tiempo, escogiendo  $I$  positivo cuando tiene sentido contrario al de las agujas del reloj vista la espira desde la izquierda.
7. Dar el sentido de la corriente inducida en el circuito de la derecha de la Figura 28-32 cuando la resistencia del circuito de la izquierda repentinamente se le hace (a) crecer; (b) disminuir.
8. Se establece un campo magnético uniforme  $\mathbf{B}$  perpendicular al plano de una espira de radio 5,0 cm, 0,4  $\Omega$  de resistencia y una autoinducción despreciable. El valor de  $B$  se aumenta a un ritmo de 40 mT/s, (a) Hallar la fem inducida en la espira, (b) la corriente inducida en la espira y (c) la producción de calor Joule en la espira por unidad de tiempo.